

Τμήμα Μηχανικών Ηλεκτρονικών Υπολογιστών,
Τηλεπικοινωνιών και Δικτύων

Διπλωματική Εργασία

Ζητήματα Κάλυψης σε Ασύρματα Δίκτυα Αισθητήρων

ΟΝΟΜΑ: Ανδρέας Αργύρης

ΕΠΙΒΛΕΠΟΝΤΕΣ: Δημήτριος Κατσαρός

Παναγιώτης Μποζάνης

Βόλος, Οκτώβριος 2009

Ευχαριστίες

Ευχαριστώ τον επιβλέποντα καθηγητή κ. Δημήτριο Κατσαρό για την καθοδήγηση κατά την εκπόνηση αυτής της διπλωματικής εργασίας.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά την οικογένειά μου, τους φίλους μου και την Ένη για τη στήριξή τους και τη βοήθειά τους στη διάρκεια των σπουδών μου.

Περιεχόμενα

| | | |
|-------|---|----|
| 1 | Πρόλογος | 7 |
| 2 | Εισαγωγικές Έννοιες..... | 8 |
| 2.1 | Επικαλυπτικά Πολύεδρα | 8 |
| 2.2 | Πλέγματα..... | 9 |
| 2.3 | Διαμέριση Voronoi | 9 |
| 2.4 | Η εικασία του Kepler..... | 10 |
| 2.5 | Η εικασία του Kelvin..... | 10 |
| 2.6 | Η επικαλυπτική δομή Weaire – Phelan | 11 |
| 3 | Επισκόπηση του προβλήματος | 13 |
| 3.1 | Υποθέσεις | 13 |
| 3.2 | Σκοπός της Εργασίας..... | 13 |
| 4 | Ανάλυση..... | 14 |
| 4.1 | Επιλογή των πολύεδρων | 15 |
| 4.2 | Ογκομετρικό Πηλίκιο και απαιτούμενος αριθμός κόμβων | 16 |
| 4.2.1 | Κύβος..... | 16 |
| 4.2.2 | Εξαγωνικό Πρίσμα | 16 |
| 4.2.3 | Ρομβικό Δωδεκάεδρο | 17 |
| 4.2.4 | Κόλουρο Οκτάεδρο. | 18 |
| 4.2.5 | Διαμέριση Weaire-Phelan..... | 19 |
| 4.2.6 | Σύγκριση των αποτελεσμάτων | 21 |
| 4.3 | Ενέργεια και Κάλυψη | 23 |
| 4.3.1 | Κύβος..... | 23 |
| 4.3.2 | Εξαγωνικό Πρίσμα | 24 |
| 4.3.3 | Ρομβικό Δωδεκάεδρο | 24 |
| 4.3.4 | Κόλουρο Οκτάεδρο | 24 |
| 4.3.5 | Διαμέριση Weaire-Phelan..... | 24 |

| | | |
|-------|---|----|
| 4.3.6 | Σύγκριση των αποτελεσμάτων | 25 |
| 4.3.7 | Σχέση Εμβέλειας Εκπομπής και Αισθητήριας Εμβέλειας..... | 25 |
| 5 | Εφαρμογή σε πραγματικά Δίκτυα..... | 27 |
| 6 | Προσομοίωση | 29 |
| 6.1 | Κύβος..... | 29 |
| 6.2 | Εξαγωνικό Πρίσμα | 29 |
| 6.3 | Ρομβικό Δωδεκάεδρο | 30 |
| 6.4 | Κόλουρο Οκτάεδρο | 30 |
| 6.5 | Διαμέριση Weaire-Phelan..... | 31 |
| 6.5.1 | Διαμέριση Voronoί ($\alpha=5/4$)..... | 31 |
| 6.5.2 | Μικρή τιμή α | 31 |
| 7 | Επίλογος..... | 32 |
| 8 | Βιβλιογραφία | 34 |

1 Πρόλογος

Αν και τα περισσότερα επίγεια ασύρματα δίκτυα μοντελοποιούνται σε δισδιάστατες (2D) δομές, στην πραγματικότητα δίκτυα σαν και αυτά λειτουργούν στον τρισδιάστατο (3D) χώρο. Οι διαστάσεις όμως τέτοιων επίγειων δικτύων (μήκος, πλάτος) είναι πολύ μεγαλύτερες από την τρίτη διάσταση (λ.χ. ύψος του κόμβου). Συνεπώς, η δισδιάστατη απεικόνιση είναι δικαιολογημένη και δεν οδηγεί σε μεγάλες ανακρίβειες.

Παρόλα αυτά σε ορισμένα περιβάλλοντα όπως το διάστημα ή υποβρυχίως, μια δισδιάστατη απεικόνιση δεν μπορεί να υφίσταται καθώς οι κόμβοι είναι διαμοιρασμένοι στον τρισδιάστατο χώρο. Αν και η υλοποίηση τέτοιων δικτύων δεν είναι ακόμα πολύ διαδεδομένη, αναπτύσσονται εφαρμογές οι οποίες θα αναβαθμίσουν τη χρήση τέτοιων τρισδιάστατων δικτύων στο μέλλον. Για παράδειγμα πρόσφατα υποβρύχια ακουστικά ad-hoc δίκτυα ή δίκτυα αισθητήρων έχουν κινήσει το ενδιαφέρον πολλών ερευνητών. Η παρατήρηση του ωκεάνιου φλοιού απαιτεί την τοποθέτηση κόμβων σε διαφορετικά βάθη στο νερό, με αποτέλεσμα τη δημιουργία ενός τρισδιάστατου δικτύου. Η κλιματική παρατήρηση είτε ακόμα και η πρόγνωση του καιρού μπορούν να επωφεληθούν με την τοποθέτηση τέτοιων δικτύων στην ατμόσφαιρα.

Στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε με θέματα κάλυψης και συνδεσιμότητας τέτοιων τρισδιάστατων δικτύων προσπαθώντας να απαντήσουμε στα εξής ερωτήματα:

- Ποιος είναι ο καλύτερος τρόπος να τοποθετήσουμε κόμβους στον τρισδιάστατο χώρο έτσι ώστε ο αριθμός των κόμβων που χρειάζονται να είναι ελάχιστος, ενώ παράλληλα να έχουμε εγγυημένη κάλυψη.
- Ποια πρέπει να είναι η ελάχιστη αναλογία της εμβέλειας εκπομπής (transmission range) και της αισθητήριας εμβέλειας (sensing range).

2 Εισαγωγικές Έννοιες

Σε αυτό το σημείο θα γίνει αναφορά σε κάποιους βασικούς όρους, παρέχοντας παράλληλα και κάποιες γενικές πληροφορίες που είναι χρήσιμες στην κατανόηση του προβλήματος καθώς και στην μέθοδο επίλυσής του.

2.1 Επικαλυπτικά Πολύεδρα

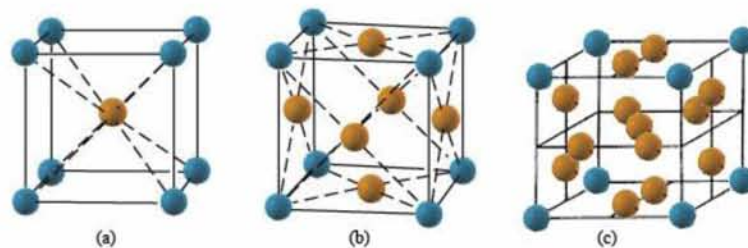
Πολύεδρο ονομάζεται το τρισδιάστατο σχήμα το οποίο αποτελείται από πεπερασμένο αριθμό πολύγωνων επιφανειών. Οι επιφάνειες ενώνονται σε ακμές και οι ακμές συνδέονται σε σημεία που ονομάζονται κορυφές του πολυέδρου. Ένα πολύεδρο καλύπτει έναν ορισμένο όγκο στον τρισδιάστατο χώρο. Για παράδειγμα πολύεδρα αποτελούν οι κύβοι, οι πυραμίδες, τα πρίσματα και άλλα σχήματα.

Επικαλυπτικό πολύεδρο ονομάζεται το πολύεδρο το οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να γεμίσει ένα χώρο ορισμένου όγκου χωρίς να υπάρχουν κενά είτε υπερκαλύψεις μεταξύ των πολυέδρων, δηλαδή, διαμέριση (tessellation) του χώρου. Η αισθητήρια εμβέλεια ενός αισθητήρα είναι σφαιρική. Συνεπώς είναι αδύνατος ο διαμερισμός του χώρου σε σφαίρες. Γι αυτό το λόγο, χρειαζόμαστε ένα επικαλυπτικό πολύεδρο το οποίο προσεγγίζει μια σφαίρα όσο το δυνατόν περισσότερο. Με άλλα λόγια, πρέπει να βρούμε ένα επικαλυπτικό πολύεδρο τέτοιο, ώστε αν μια κυψέλη (cell) μοντελοποιηθεί από το συγκεκριμένο πολύεδρο, τότε ο αριθμός των κυψελών που χρειάζεται για την κάλυψη αυτού του χώρου θα είναι ελάχιστος. Επίσης, η ακτίνα από το κέντρο της κυψέλης μέχρι την πιο απομακρυσμένη γωνία (η ακτίνα, δηλαδή, του πολυέδρου) δεν θα είναι μεγαλύτερη από την αισθητήρια εμβέλεια.

Μερικά από τα επικαλυπτικά πολύεδρα είναι ο κύβος, το τριγωνικό πρίσμα, το εξαγωνικό πρίσμα, το κόλουργο (truncated) οκτάεδρο και το «gyrobifastigium». Άλλα στερεά όπως το ρομβικό δωδεκάεδρο, το επιμηκυμένο δωδεκάεδρο, το συντεθλιμμένο δωδεκάεδρο έχουν επίσης επικαλυπτικές ιδιότητες. Επικάλυψη του χώρου μπορούμε να έχουμε και από συνδυασμό στερεών όπως για παράδειγμα τετράεδρων και οκτάεδρων, είτε οκτάεδρων, κόλουργων οκτάεδρων και κύβων σε αναλογία 1:1:3. Τέλος, επικάλυψη του χώρου είναι δυνατόν να επιτευχθεί με τη δομή Weaire-Phelan που αποτελείται από το συνδυασμό μη κανονικού δωδεκάεδρου και μη κανονικού δεκατετράεδρου (tetrakaidecahedron).

2.2 Πλέγματα

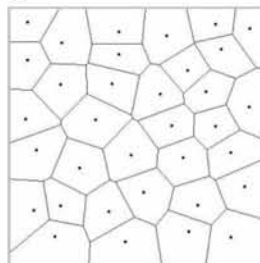
Πλέγμα στο \mathbb{R}^n είναι ένα υποσύνολο του \mathbb{R}^n το οποίο διανοίγει τον πραγματικό διανυσματικό χώρο \mathbb{R}^n . Κάθε πλέγμα στον \mathbb{R}^n μπορεί να δημιουργηθεί από μια βάση του \mathbb{R}^n σχηματίζοντας όλους τους γραμμικούς συνδυασμούς με ακέραιους συντελεστές. Στον δισδιάστατο χώρο υπάρχουν πέντε βασικοί τύποι πλεγμάτων (τετραγωνικό, ρομβικό, εξαγωνικό, ορθογώνιο και παραλληλόγραμμο), ενώ στον τρισδιάστατο χώρο υπάρχουν τα δεκατέσσερα πλέγματα Bravais. Τα κυριότερα από αυτά είναι το *BCC* (Body Centered Cubic) και το *FCC* (Face Centered Cubic). Ένα άλλο πλέγμα που θα μας απασχολήσει είναι η δομή *β -W* πάνω στην οποία βασίζεται η δομή Weaire-Phelan.



εικ. 1 Βασικοί τύποι πλεγμάτων: (a)BCC (b)FCC (c) β -W

2.3 Διαμέριση Voronoi

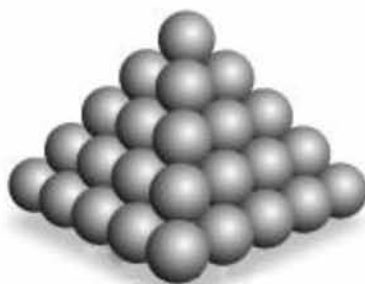
Στον τρισδιάστατο χώρο, ή για οποιοδήποτε διακριτό σύνολο σημείων S που ανήκει στον Ευκλείδειο χώρο, το σύνολο όλων των σημείων που είναι πλησιέστερα σε ένα σημείο $c \in S$ από οποιοδήποτε άλλο σημείο του S , αποτελεί το εσωτερικό ενός κυρτού πολύεδρου που ονομάζεται κυψέλη Voronoi του c . Το σύνολο αυτών των πολύεδρων διαμερίζουν το χώρο και ονομάζεται διαμέριση Voronoi που αντιστοιχεί στο σύνολο S . Η διαμέριση Voronoi σε κάθε λύση του προβλήματος για την βέλτιστη τοποθέτηση των κόμβων στο χώρο, μας δίνει το βέλτιστο σχήμα κάθε κυψέλης.



εικ. 2 Διαμέριση Voronoi στον δισδιάστατο χώρο

2.4 Η εικασία του Kepler

Ένα σχετικό πρόβλημα είναι το πρόβλημα της στοίβαξης σφαιρών του Kepler. Το πρόβλημα έγκειται στην εύρεση του πιο αποδοτικού τρόπου στοίβαξης σφαιρών όμοιου μεγέθους. Το 1611 ο Kepler υπέθεσε ότι ο πιο αποδοτικός τρόπος στοίβαξης σφαιρών ήταν σφαίρες τοποθετημένες έτσι ώστε το κέντρο τους να είναι οι κόμβοι του πλέγματος FCC, αλλά δεν κατάφερε να το αποδείξει. Το 1998 η εικασία του Kepler αποδείχτηκε ορθή από τον Thomas Hales. Το πλέγμα FCC έχει πυκνότητα στοίβαξης 74,048% ενώ το πλέγμα BCC έχει πυκνότητα περίπου 68%. Παρόλα αυτά, ενώ το πλέγμα FCC έχει μεγαλύτερη πυκνότητα στοίβαξης σφαιρών από το πλέγμα BCC, η διαμέριση Voronoi του πλέγματος BCC που μας δίνει το κόλouro οκτάεδρο, χρειάζεται (όπως θα δούμε παρακάτω) 43,25% λιγότερους κόμβους στο πρόβλημά μας από ότι το πλέγμα FCC που έχει σαν διαμέριση Voronoi το ρομβικό δωδεκάεδρο.



εικ. 3 Η εικασία του Kepler

2.5 Η εικασία του Kelvin

Το 1887 ο λόρδος Kelvin έθεσε το εξής ερώτημα: «Ποιος είναι ο βέλτιστος τρόπος για να γεμίσουμε ένα χώρο με κυψέλες του ίδιου όγκου, έτσι ώστε το εμβαδόν της επιφάνειας των κυψελών να είναι ελάχιστο;» Αυτό ουσιαστικά είναι το πρόβλημα της εύρεσης μιας επικαλυπτικής δομής που να έχει το μεγαλύτερο *ισοπεριμετρικό πηλίκο*. Στον τρισδιάστατο χώρο ορίζουμε ως *ισοπεριμετρικό πηλίκο* το πηλίκο $36\pi V^2/S^3$, όπου V και S είναι αντίστοιχα ο όγκος και η επιφάνεια μιας τρισδιάστατης δομής (π.χ. πολύεδρο). Η σφαίρα έχει το μεγαλύτερο *ισοπεριμετρικό πηλίκο* που είναι ίσο με 1.

Η απάντηση του Kelvin στο ερώτημά του ήταν ότι η βέλτιστη κυψέλη είναι το δεκατετράεδρο κόλouro οκτάεδρο με μικρή καμπυλότητα στις εξάγωνες πλευρές του, με *ισοπεριμετρικό πηλίκο* 0,757. Το *ισοπεριμετρικό πηλίκο* του κόλουρου οκτάεδρου χωρίς καμπυλότητα είναι 0,753367. Έως το 1994 η λύση του Kelvin θεωρείτο σωστή, ωστόσο οι

δύο φυσικοί Dennis Weaire και Robert Phelan βρήκαν μια άλλη επικαλυπτική δομή με μεγαλύτερο ισοπεριμετρικό πηλίκο συγκριτικά με το κόλουρο οκτάεδρο.



εικ. 4 Η εικασία του Kelvin

2.6 Η επικαλυπτική δομή Weaire – Phelan

Η δομή ή αφρός Weaire-Phelan αποτελείται από δύο ειδών πολύεδρα: το μη κανονικό δωδεκάεδρο και το μη κανονικό δεκατετράεδρο (tetrakaidecahedron) τα οποία προέρχονται από τη διαμέριση Voronoi του β -W πλέγματος (βλ. 2.2). Μια μοναδιαία κυψέλη δεν αποτελείται από ένα πολύεδρο (όπως συμβαίνει για παράδειγμα στο κόλουρο οκτάεδρο) αλλά από έξι δεκατετράεδρα και δύο δωδεκάεδρα. Μια τέτοια μοναδιαία κυψέλη που αποτελείται από πολύεδρα ίδιου όγκου έχει 0,3% μικρότερο εμβαδόν επιφάνειας από ότι το κόλουρο οκτάεδρο, ενώ το ισοπεριμετρικό πηλίκο της δομής είναι 0,765.

Στην πραγματικότητα η δομή Weaire-Phelan πολυέδρων ίδιου όγκου είναι ένα μέλος από μια κλάση δομών η οποία παραμετροποιείται από έναν πραγματικό αριθμό α , $0 < \alpha < 3/2$. Για παράδειγμα η διαμέριση Voronoi του β -W πλέγματος μας δίνει δομή με παράμετρο $\alpha = 5/4$. Για οποιαδήποτε άλλη τιμή του α , τα πολύγωνα προέρχονται από διαμέριση Voronoi με βάρη στα σημεία του BCC διαφορετικά από αυτά των υπόλοιπων σημείων του β -W πλέγματος. Διαμέριση Voronoi με βάρη σημαίνει ότι η επιφάνεια κάθε πολυέδρου (κυψέλης) περνάει ανάμεσα από το σταθμισμένο μέσο των 2 σχετικών σημείων (κόμβων), ενώ παραμένει κάθετη στη νοητή γραμμή που ενώνει τα σημεία αυτά. Για παράδειγμα η δομή Weaire-Phelan με $\alpha = \sqrt[3]{2}$ μας δίνει πολύεδρα ίδιου όγκου.

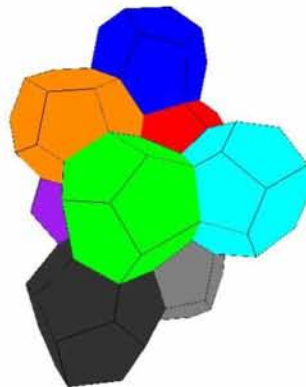
Στο σημείο αυτό θα αναλύσουμε τα πολύεδρα της δομής Weaire-Phelan. Στο δωδεκάεδρο οι δώδεκα πλευρές του είναι όλα ισοσκελή πεντάγωνα με τέσσερις πλευρές μήκους $\sqrt{21}\alpha/6$ και μία πλευρά μήκους α . Η επιφάνεια είναι $\sqrt{5}\alpha^2/2$ και κάθε πλευρά απέχει $2\alpha/\sqrt{5}$ από το κέντρο. Συνεπώς, ο όγκος του δωδεκάεδρου είναι $12 \times (1/3 \times \sqrt{5}\alpha^2/2$

$\times 2\alpha/\sqrt{5}) = 4\alpha^3$. Στο σημείο αυτό πρέπει να αναφερθεί ότι η επιλογή του $\alpha < 3/2$ μας εξασφαλίζει ότι οποιαδήποτε δύο δωδεκάεδρα στη δομή δεν ακουμπούν το ένα με το άλλο. Επομένως, κάθε δωδεκάεδρο μοιράζεται τις πλευρές του με τα δεκατετράεδρα που το περιβάλλουν.

Οι πλευρές του δεκατετράεδρου είναι τριών τύπων:

- Δύο ισοσκελείς εξάγωνα επιφάνειες με δύο παράλληλες πλευρές μήκους α και τέσσερις πλευρές μήκους $(1 - \alpha/2)\sqrt{5}$. Κάθε τέτοια επιφάνεια έχει εμβαδόν $4 - \alpha^2$ και απέχει απόσταση 1 από το κέντρο.
- Τέσσερις πεντάγωνα ισοσκελείς πλευρές που είναι και οι μόνες που μοιράζονται με το δωδεκάεδρο. Αυτές απέχουν από το κέντρο $(5 - 2\alpha)\sqrt{5}$.
- Οκτώ ισοσκελείς πεντάγωνα πλευρές οι οποίες έχουν δύο πλευρές μήκους $(1 - \alpha/2)\sqrt{5}$, δύο πλευρές μήκους $(\sqrt{21}\alpha)/6$ έκαστη και μία πλευρά μήκους $(2 - 4\alpha/3)\sqrt{3}$. Κάθε μία από αυτές τις πλευρές έχει εμβαδόν $\sqrt{6}(3 - \alpha^2)/3$, και βρίσκεται σε απόσταση $\sqrt{6}/2$ από το κέντρο.

Δεδομένων των παραπάνω ο όγκος του δεκατετράεδρου είναι $4(8 - \alpha^3)/3$.



εικ. 5 Η μοναδιαία κυψέλη Weaire-Phelan

3 Επισκόπηση του προβλήματος

3.1 Υποθέσεις

- Μπορούμε να έχουμε κόμβους όμοιου σχήματος και μεγέθους ενώ στην περίπτωση κόμβων Weaire-Phelan μπορούμε να έχουμε κόμβους δύο ειδών.
- Οι ομοειδείς κόμβοι θα έχουν αισθητήρια εμβέλεια R ενώ για τους κόμβους Weaire-Phelan θα ορίσουμε εμβέλεια R_{\max} που είναι η μέγιστη ακτίνα του μη-κανονικού δωδεκάεδρου. Η «αντίληψη» του κόμβου είναι ομοιοκατευθυντική και η αισθητήρια εμβέλεια μπορεί να αναπαραστεί από μια σφαίρα με ακτίνα R ή R_{\max} με τον κόμβο-αισθητήρα στο κέντρο της.
- Η αισθητήρια εμβέλεια είναι πολύ μικρότερη από το μήκος, πλάτος και ύψος του τρισδιάστατου χώρου που πρέπει να καλυφθεί. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα οι ανομοιογένειες στα όρια του χώρου να είναι αμελητέες και να μπορούν να αγνοηθούν.
- Κάθε σημείο στον τρισδιάστατο χώρο πρέπει να καλύπτεται από την εμβέλεια R ή R_{\max} αντίστοιχα τουλάχιστον ενός κόμβου.
- Εάν η τοποθεσία των κόμβων είναι αμετάβλητη, τότε η θέση τους είναι αυθαίρετη. Εάν οι κόμβοι είναι κινητοί, τότε αυτοί αναπτύσσονται αρχικά τυχαία και η κίνησή τους είναι ελεύθερη. Συνεπώς, θα αγνοήσουμε τις φυσικούς περιορισμούς τοποθέτησης των κόμβων και θα θεωρήσουμε ότι μπορούμε να τοποθετήσουμε έναν κόμβο οπουδήποτε στο δίκτυο.

3.2 Σκοπός της Εργασίας

- Η εύρεση του αριθμού των κόμβων και της τοποθεσίας τους ώστε δεδομένου του R , να ελαχιστοποιηθεί ο αριθμός των κόμβων που χρειάζεται για την κάλυψη οποιουδήποτε τρισδιάστατου χώρου.
- Η εύρεση της ελάχιστης εμβέλειας εκπομπής σε σχέση με την αισθητήρια εμβέλεια R , προκειμένου όλοι οι κόμβοι να συνδέονται μεταξύ τους, εφόσον πληρούν το πρώτο κριτήριο.

4 Ανάλυση

Σε αυτό το σημείο θα αναλύσουμε το πρόβλημα από τη μεριά του σχήματος των κυψελών Voronoi που δημιουργούνται από την τοποθέτηση των κόμβων στο δίκτυο. Κάθε κυψέλη Voronoi θα είναι είτε όμοια, είτε (στην περίπτωση Weaire-Phelan) διαφορετική. Λαμβάνοντας υπόψη ότι οι ανομοιογένειες στα όρια του χώρου είναι αμελητέες, συνεπάγεται ότι ο συνολικός αριθμός των κόμβων που χρειάζονται για την επικάλυψή του, είναι ο λόγος του συνολικού όγκου προς τον όγκο κάθε κυψέλης Voronoi. Έτσι, η ελαχιστοποίηση του αριθμού των κόμβων προέρχεται από τη μεγιστοποίηση του όγκου των κυψελών Voronoi δεδομένης της αισθητήριας εμβέλειας R .

Η ακτίνα της περιγεγραμμένης σφαίρας (circumsphere) μιας κυψέλης Voronoi πρέπει να είναι μικρότερη ή ίση με την αισθητήρια εμβέλεια R . Προκειμένου, λοιπόν, να μεγιστοποιήσουμε τον όγκο, η ακτίνα της περιγεγραμμένης σφαίρας πρέπει να είναι πάντα ίση με R . Συνεπώς, αφού η ακτίνες R είναι δεδομένες, οι όγκοι των περιγεγραμμένων σφαιρών των κυψελών Voronoi θα είναι:

$$V_{cs} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Τέλος, το σχήμα κάθε τρισδιάστατης κυψέλης Voronoi είναι πάντα επικαλυπτικό πολύεδρο. Άρα, το πρόβλημα συνοψίζεται στην εύρεση επικαλυπτικών πολυέδρων που έχουν το μεγαλύτερο λόγο όγκου προς τον όγκο της περιγεγραμμένης σφαίρας. Η αναλογία αυτή ονομάζεται *ογκομετρικό πηλίκο* (volumetric quotient)

Ορισμός: Για οποιοδήποτε πολύεδρο, εάν η μέγιστη απόσταση από το κέντρο του σε οποιαδήποτε κορυφή του είναι R και ο όγκος του πολυέδρου είναι V , τότε το ογκομετρικό πηλίκο του πολυέδρου θα είναι:

$$\frac{V}{V_{cs}} = \frac{V}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

Επομένως ο όγκος της περιγεγραμμένης σφαίρας είναι το άνω όριο του όγκου οποιουδήποτε πολυέδρου και η τιμή του ογκομετρικού πηλίκου είναι πάντα μεταξύ του 0 και του 1. Οπότε δεδομένης ακτίνας R , ο αριθμός των κόμβων που χρειάζεται για την κάλυψη του τρισδιάστατου χώρου, είναι αντιστρόφως ανάλογος του ογκομετρικού πηλίκου. Η λύση

στο πρόβλημά μας, λοιπόν, είναι η εύρεση ενός πολυέδρου ή συνδυασμού αυτών, τέτοιου ώστε να πετύχουμε το μέγιστο ογκομετρικό πηλίκο.

Στη συνέχεια της εργασίας θα μας απασχολήσει η επικάλυψη του τρισδιάστατου χώρου από τα εξής πολύεδρα: τον κύβο, το εξαγωνικό πρίσμα, το ρομβικό δωδεκάεδρο, το κόλouro οκτάεδρο και τα πολύεδρα Weaire-Phelan.

4.1 Επιλογή των πολυέδρων

Στο συγκεκριμένο κομμάτι θα αναλύσουμε τα κριτήρια επιλογής των πολυέδρων που θα μας απασχολήσουν στην εργασία. Αρχικά, επιλέγουμε τον κύβο καθώς είναι το μοναδικό κανονικό πολύεδρο που διαμερίζει το χώρο.

Η λύση του προβλήματος μας στον δισδιάστατο χώρο είναι το εξάγωνο. Τα επικαλυπτικά πολύεδρα τα οποία έχουν ως τομή το εξάγωνο -στο δισδιάστατο χώρο- είναι το εξαγωνικό πρίσμα και το ρομβικό δωδεκάεδρο. Συνεπώς θα συμπεριλάβουμε και τα συγκεκριμένα στην ανάλυσή μας.

Υπάρχει και άλλο ένα κριτήριο για την επιλογή του ρομβικού δωδεκάεδρου. Το πρόβλημά μας μπορεί να λυθεί χρησιμοποιώντας το πρόβλημα του Kepler, βρίσκοντας τη μέγιστη στοίβαξη σφαιρών και παίρνοντας ύστερα τη διαμέριση Voronoi που αντιστοιχεί στα κέντρα των σφαιρών. Η ακτίνα των σφαιρών θα είναι τέτοια, ώστε η μέγιστη απόσταση του κέντρου μιας κυψέλης Voronoi έως την πιο απομακρυσμένη κορυφή της να είναι η αισθητήρια ακτίνα R . Όπως είδαμε παραπάνω το πλέγμα FCC μας δίνει την καλύτερη λύση. Η διαμέριση Voronoi του πλέγματος μας δίνει το ρομβικό δωδεκάεδρο.

Από την εικασία του Kelvin είδαμε ότι το κόλouro οκτάεδρο ήταν η λύση στο πρόβλημα της εύρεσης ενός επικαλυπτικού πολυέδρου που έχει ελάχιστο ισοπεριμετρικό πηλίκο και προέρχεται από τη διαμέριση Voronoi του πλέγματος BCC. Συγκεκριμένα θα επιλέξουμε τη μη κυρτή εκδοχή του οκτάεδρου καθώς οι διαφορές με το κυρτό είναι αμελητέες και επειδή μαθηματικά είναι περισσότερο ευέλικτο σχήμα.

Εν κατακλείδι, θα επιλέξουμε τη δομή Weaire-Phelan η οποία προέρχεται από τη διαμέριση Voronoi του πλέγματος β -W. Από τη διαμέριση αυτή προέρχονται 2 πολύεδρα. Όπως αναφέραμε παραπάνω η συγκεκριμένη δομή μπορεί να παραμετροποιηθεί από έναν παράγοντα α . Συνεπώς, στην έρευνα θα αναζητήσουμε τη βέλτιστη τιμή του α που μας δίνει καλύτερα αποτελέσματα.

Από τα πολύεδρα που επιλέξαμε, όλα πλην του αφρού Weaire-Phelan είναι όμοια, εννοώντας ότι η μοναδιαία κυψέλη τους αποτελείται από ένα μόνο πολύεδρο. Έτσι, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οι αισθητήρες είναι όμοιοι και έχουν όμοια αισθητήρια εμβέλεια. Ωστόσο στη δομή Weaire-Phelan μπορούμε να θεωρήσουμε δύο ειδών αισθητήρες σε αναλογία 6 προς 2. Αυτή η δομή μπορεί να είναι πολύ χρήσιμη καθώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε δύο ειδών αισθητήρες σε ένα χώρο για λόγους που αρμόζουν ανάλογα με την περίπτωση.

4.2 Ογκομετρικό Πηλίκο και απαιτούμενος αριθμός κόμβων

Στο σημείο αυτό θα υπολογίσουμε τα ογκομετρικά ηλίκα των επιλεγμένων πολυέδρων και θα παρουσιάσουμε μια σύγκριση του αριθμού των κόμβων που απαιτούνται όταν κάθε πολύεδρο χρησιμοποιείται ως κυψέλη διαμέρισης Voronoi.

4.2.1 Κύβος

Στον κύβο εάν κάθε πλευρά του έχει μήκος a , τότε η ακτίνα της περιγεγραμμένης σφαίρας είναι $\sqrt{3}a/2$. Οπότε το ογκομετρικό ηλίκο του κύβου είναι:

$$\frac{V_c}{V_{cs}} = \frac{a^3}{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^3} = \frac{2}{\sqrt{3}\pi} = 0,36755$$

4.2.2 Εξαγωνικό Πρίσμα

Το ογκομετρικό ηλίκο στο εξάγωνο πρίσμα εξαρτάται από το ύψος του. Συνεπώς, πρέπει πρώτα να βρούμε το βέλτιστο ύψος ενός εξαγωνικού πρίσματος που έχει το μεγαλύτερο ογκομετρικό ηλίκο μεταξύ των εξαγωνικών πρισμάτων. Έστω ότι το μέγεθος κάθε ακμής του πρίσματος είναι a και το ύψος του είναι h . Τότε, η ακτίνα της περιγεγραμμένης σφαίρας του σχήματος θα είναι $\sqrt{a^2 + h^2/4}$ και ο όγκος του εξαγωνικού πρίσματος θα είναι $3\sqrt{3}a^2h/2$. Αν θεωρήσουμε συνάρτηση $f_{vq}(a, h)$ το ογκομετρικό ηλίκο

τότε έχουμε:


$$f_{vq}(a, h) = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2h}{\frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{a^2 + \frac{h^2}{4}}\right)^3}$$

Εάν θέσουμε τη μερική παράγωγο της $f_{vq}(a, h) = 0$ τότε έχουμε:

$$\frac{\partial f_{vq}(a, h)}{\partial h} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2}{\frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{a^2 + \frac{h^2}{4}}\right)^3} - \frac{3}{2} \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 h \frac{2h}{4}}{\frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{a^2 + \frac{h^2}{4}}\right)^5} = 0$$

$$\Rightarrow a^2 + \frac{h^2}{4} = \frac{3h^2}{4} \Rightarrow h = a\sqrt{2}$$

Οπότε η βέλτιστη τιμή του ύψους h είναι $a\sqrt{2}$ και συνεπώς το βέλτιστο ογκομετρικό πηλίκο του εξαγωνικού πρίσματος θα είναι:

$$\frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 a\sqrt{2}}{\frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{2}}\right)^3} = \frac{6}{4\pi} = 0,477$$


εικ. 6 Εξαγωνικό Πρίσμα

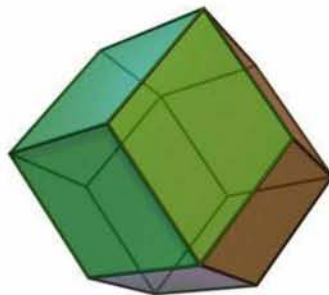
4.2.3 Ρομβικό Δωδεκάεδρο

Το ρομβικό δωδεκάεδρο μπορεί να κατασκευαστεί από δύο όμοιους κύβους με τον εξής τρόπο: Χωρίζουμε τον έναν κύβο σε έξι όμοιες πυραμίδες ώστε η βάση κάθε πυραμίδας αποτελείται από μια πλευρά του κύβου. Τοποθετώντας ύστερα τις πυραμίδες στο δεύτερο κύβο, προκειμένου η βάση της κάθε πυραμίδας να είναι πάνω στην κάθε πλευρά του κύβου, δημιουργείται το ρομβικό δωδεκάεδρο. Δεδομένου ότι η ακμή του κύβου έχει μήκος a (κάθε ακμή, δηλαδή, του ρομβικού δωδεκάεδρου είναι $\sqrt{3}a/2$), τότε ο συνολικός όγκος του δωδεκάεδρου είναι $2a^3$. Το κέντρο του ρομβικού δωδεκάεδρου είναι το κέντρο του δεύτερου κύβου. Οκτώ κορυφές του «άθικτου» κύβου σχηματίζουν οκτώ κορυφές του ρομβικού δωδεκάεδρου και η απόστασή τους από το κέντρο, είναι η ακτίνα της περιγεγραμμένης σφαίρας του κύβου, δηλαδή, $\sqrt{3}a/2$. Οι υπόλοιπες έξι κορυφές του πολύεδρου σχηματίζονται από τα 6 κομμάτια του πρώτου κύβου. Η απόσταση από το κέντρο του

δεύτερου κύβου έως την πλευρά του είναι $\alpha/2$ και το ύψος κάθε πυραμίδας είναι επίσης $\alpha/2$. Άρα, η απόσταση από το κέντρο του ρομβικού δωδεκάεδρου έως τις 6 αυτές κορυφές είναι α . Συνεπώς, η ακτίνα της περιγεγραμμένης σφαίρας του ρομβικού δωδεκάεδρου είναι α . Άρα το ογκομετρικό πηλίκο θα είναι:

$$\frac{2\alpha^3}{\frac{4}{3}\pi\alpha^3} = \frac{6}{4\pi} = 0,477$$

που είναι ίδιο με αυτό του εξαγωνικού πρίσματος.

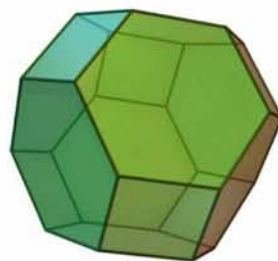


εικ. 7 Ρομβικό Δωδεκάεδρο

4.2.4 Κόλουρο Οκτάεδρο.

Το κόλουρο οκτάεδρο έχει δεκατέσσερις έδρες εκ των οποίων οι οκτώ είναι εξάγωνες και οι έξι είναι τετράγωνες. Το μήκος των ακμών των εξαγώνων και των τετραγώνων είναι το ίδιο. Έστω ότι η ακμή είναι α . Η απόσταση μεταξύ δύο απέναντι εξαγωνικών πλευρών είναι $\sqrt{6}\alpha$ και η απόσταση μεταξύ δύο απέναντι τετράγωνων πλευρών είναι $2\sqrt{2}\alpha$. Η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου είναι $\sqrt{10}\alpha/2$. Το εμβαδόν του κόλουρου οκτάεδρου είναι $8\sqrt{2}\alpha^3$ οπότε το ογκομετρικό πηλίκο είναι:

$$\frac{8\sqrt{2}\alpha^3}{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{1}{2}\sqrt{10}\alpha\right)^3} = \frac{24}{5\sqrt{5}\pi} = 0,68329$$



εικ. 8 Κόλουρο Οκτάεδρο

4.2.5 Διαμέριση Weaire-Phelan

Η δομή Weaire-Phelan είναι πιο πολύπλοκη για την ανάλυσή της καθώς κάθε κλάση Weaire-Phelan εξαρτάται από την παράμετρο α . Επιπλέον, έχουμε να κάνουμε με δύο ειδών αισθητήρες. Για το δωδεκάεδρο οι συντεταγμένες των κορυφών δεδομένου ότι το κέντρο είναι στο $(0,0,0)$ είναι στα σημεία $(\pm 2\alpha/3, \pm 2\alpha/3, \pm 2\alpha/3)$, $(0, \pm \alpha/2, \pm \alpha)$, $(0, \pm \alpha, \pm \alpha/2)$, $(\pm \alpha/2, \pm \alpha, 0)$, $(\pm \alpha/2, 0, \pm \alpha)$, $(\pm \alpha, 0, \pm \alpha/2)$, $(\pm \alpha, \pm \alpha/2, 0)$. Η απόσταση από το κέντρο στα σημεία της πρώτης μορφής είναι: $R_{dod_1} = \sqrt{(2\alpha/3)^2 + (2\alpha/3)^2 + (2\alpha/3)^2} = 2\alpha\sqrt{3}/3$. Η απόσταση από το κέντρο στα σημεία της δεύτερης μορφής είναι $R_{dod_2} = \sqrt{(\alpha/2)^2 + \alpha^2} = \alpha\sqrt{5}/2$. Παρατηρούμε ότι η μέγιστη ακτίνα που είναι και η ακτίνα της περιγεγραμμένης σφαίρας του δωδεκάεδρου, είναι η R_{dod_1} . Είναι γνωστό ακόμα ότι ο όγκος του δωδεκάεδρου είναι ίσος με $4\alpha^3$. Συνεπώς, το ογκομετρικό πηλίκο του δωδεκάεδρου θα είναι:

$$\frac{4\alpha^3}{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\alpha\right)^3} = \frac{9\sqrt{3}}{8\pi} = 0,620245$$

Στο δεκατετράεδρο (tetraikadehedron) οι συντεταγμένες των κορυφών του είναι στα σημεία $(1-2\alpha/3, \pm(2-2\alpha/3), \pm 2\alpha/3)$, $(2\alpha/3-1, \pm 2\alpha/3, \pm(2-2\alpha/3))$, $(1-\alpha, \pm(2-\alpha/2), 0)$, $(\alpha-1, 0, \pm(2-\alpha/2))$, $(1, \pm(2-\alpha), \pm \alpha/2)$, $(-1, \pm \alpha/2, \pm(2-\alpha))$, $(-1, \pm 1, 0)$ και $(1, 0, \pm 1)$. Έτσι, έχουμε 4 ακτίνες:

$$R_{tet_1} = \sqrt{\left(1 - \frac{2\alpha}{3}\right)^2 + \left(\frac{2\alpha}{3}\right)^2 + \left(2 - \frac{2\alpha}{3}\right)^2} = \sqrt{5 + \frac{4}{3}(-3 + \alpha)a}$$

$$R_{tet_2} = \sqrt{(1 - \alpha)^2 + \left(2 - \frac{\alpha}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{20 + a(-16 + 5a)}$$

$$R_{tet_3} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + (2 - \alpha)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{20 + a(-16 + 5a)}$$

$$R_{tet_4} = \sqrt{2}$$

Παρατηρούμε ότι η μέγιστη ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του δεκατετράεδρου είναι η R_{tet_1} . Ο όγκος του δεκατετράεδρου είναι $4(8 - \alpha^3)/3$.

Άρα, το ογκομετρικό ηλίκο του δεκατετράεδρου θα είναι:

$$\frac{\frac{4}{3}(8 - a^3)}{\frac{4}{3}\pi(\sqrt{5 + \frac{4}{3}(-3 + a)a})^3}$$

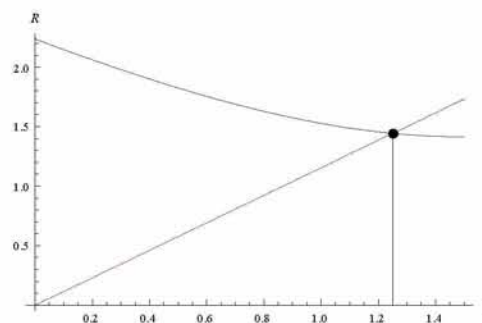
Παρατηρούμε ότι το ογκομετρικό ηλίκο του δεκατετράεδρου εξαρτάται από το a σε αντίθεση με το δωδεκάεδρο που παραμένει σταθερό. Αν πάρουμε την παράγωγο του ογκομετρικού ηλίκου θα δούμε ότι έχει μέγιστη τιμή 0,64828 για $a=1,16144$.

Παρακάτω θα δούμε κάποια αποτελέσματα βάσει των τιμών του a . Αρχικά, οι μέγιστες ακτίνες των περιγεγραμμένων κύκλων του δωδεκάεδρου και του δεκατετράεδρου είναι ίσες ($R_{dod_1} = R_{tet_1}$) όταν $a=5/4=1,25$, δηλαδή, έχουμε κανονική διαμέριση Voronoi. Στην περίπτωση αυτή, το ογκομετρικό ηλίκο του δωδεκάεδρου θα είναι 0,62045 και το δεκατετράεδρου 0,64093. Η περίπτωση τα πολύεδρα Weaire-Phelan να έχουν ίδια κάλυψη είναι ίσως η μοναδική συγκρίσιμη περίπτωση με τα υπόλοιπα πολύγωνα που μελετήσαμε. Συνεπώς, θα υποθέσουμε την ύπαρξη ενός πολυγώνου με όγκο το μέσο όγκο του δωδεκάεδρου και του δεκατετράεδρου και ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου ίση με R_{dod_1} για $a=1,25$. Ο μέσος όγκος των πολυγώνων θα είναι:

$$V_{med} = \frac{4a^3 + \frac{4}{3}(8 - a^3)}{2} = \frac{4}{3}(4 + a^3)$$

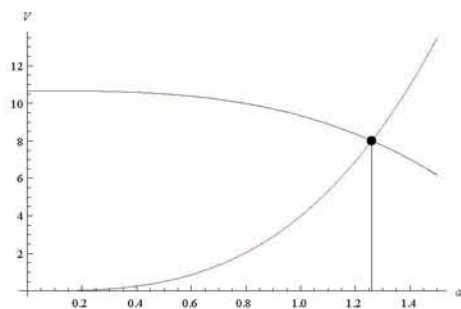
Άρα για $a=5/4$ το μέσο ογκομετρικό ηλίκο θα είναι:

$$\frac{\frac{4}{3}(4 + (5/4)^3)}{\frac{4}{3}\pi(\sqrt{(5/6)^2 + (5/6)^2 + (5/6)^2})^3} = 0,630169$$



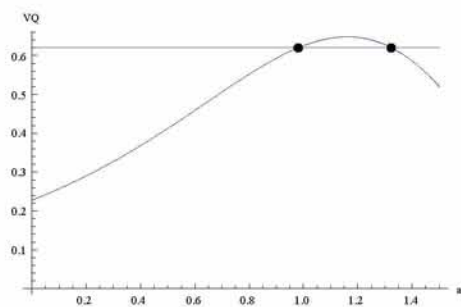
εικ. 9 οι ακτίνες R_{tet} και R_{dod} με σημείο τομής στο $a=5/4$

Για τη λύση του προβλήματος μας ενδιαφέρει και η περίπτωση που οι όγκοι των δύο πολυέδρων είναι ίσοι. Εξισώνοντας τους όγκους των πολυέδρων διαπιστώνουμε ότι η παράμετρος $a = \sqrt[3]{2}$. Η τιμή των ογκομετρικών ηλίκα θα είναι **0,620245** και 0,638107. Θα περίμενε κανείς ότι αφού οι όγκοι είναι ίσοι, και τα ογκομετρικά ηλίκα θα έπρεπε να είναι και αυτά ίσα μεταξύ τους. Κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει καθώς ενώ οι όγκοι είναι ίσοι, οι ακτίνες των περιγεγραμμένων κύκλων διαφέρουν μεταξύ τους. Συγκεκριμένα είναι: $R_{tet} = 1,44113$ και $R_{dod} = 1,45483$.



εικ. 10 οι όγκοι V_{tet} και V_{dod} με σημείο τομής στο $a = \sqrt[3]{2}$

Από τα παραπάνω δημιουργείται το ερώτημα: Για ποιες τιμές του a έχουμε ίδια ογκομετρικά ηλίκα; Όπως βλέπουμε και στο παρακάτω διάγραμμα είναι 2 οι περιπτώσεις που έχουμε: για $a=0,982433$ και $a=1,32282$. Παρόλα αυτά όπως και προηγουμένως, οι όγκοι των πολυέδρων δεν είναι ίδιοι. Συγκρίνοντας τους όγκους για τις παραπάνω τιμές του a στην εικ.10 συμπεραίνουμε ότι η διαφορά μεταξύ τους μπορεί να είναι και αρκετά μεγάλη.



εικ. 11 τα ογκομετρικά ηλίκα VQ_{tet} και VQ_{dod}

4.2.6 Σύγκριση των αποτελεσμάτων

Από τα παραπάνω πολυέδρα συνάγουμε ότι το κόλouro οκτάεδρο προσφέρει το μεγαλύτερο ογκομετρικό ηλίκο. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να τοποθετήσουμε στο χώρο τους αισθητήρες πιο αποδοτικά από ότι οι άλλες δομές, δηλαδή, να χρησιμοποιήσουμε μικρότερο αριθμό αισθητήρων.

Κατά συνέπεια μπορούμε να συγκρίνουμε τον αριθμό των αισθητήρων που χρειάζονται από κάθε τύπο πολυέδρου. Ο λόγος του ογκομετρικού ηλίκου του κόλουρου οκτάεδρου προς αυτό των υπόλοιπων πολυέδρων μας δίνει μια εικόνα για το πόσοι παραπάνω κόμβοι χρειάζονται για την κάλυψη ενός χώρου. Για τον κύβο ο αριθμός των κόμβων που χρειάζονται για την κάλυψη ενός χώρου είναι $0,68329/0,36755=1,859$ φορές περισσότερος από τον αριθμό του κόλουρου οκτάεδρου. Για το εξαγωνικό πρίσμα η τιμή αυτή είναι $0,68329/0,477=1,4325$. Ομοίως, θα είναι και η τιμή για το ρομβικό δωδεκάεδρο καθώς δείξαμε ότι το ογκομετρικό ηλίκο του εξαγωνικού πρίσματος και του ρομβικού δωδεκάεδρου, είναι ίσα μεταξύ τους. Για τη δομή Weaire-Phelan θα πάρουμε την περίπτωση που οι ακτίνες των περιγεγραμμένων κύκλων των δύο πολυέδρων είναι ίσες, δηλαδή, την κλάση Weaire-Phelan με παράμετρο $\alpha=5/4$. Επιλέγουμε αυτή την περίπτωση καθώς όπως και στα παραπάνω σχήματα, τα πολύεδρα προέρχονται από την κανονική διαμέριση Voronoi και ενώ οι όγκοι των διαφορετικών πολυέδρων δεν είναι ίδιοι, η αισθητήρια εμβέλεια (όγκος περιγεγραμμένου κύκλου) είναι όμοια. Όπως δείξαμε παραπάνω το μέσο ογκομετρικό ηλίκο σε αυτή την περίπτωση θα είναι $0,630169$. Άρα, θα χρειαστούν $0,68329/0,630169=1,0843$ περισσότεροι κόμβοι από το κόλουρο οκτάεδρο. Στον παρακάτω πίνακα συνοψίζουμε τα αποτελέσματα:

| Πολύεδρο | Ογκομετρικό Ηλίκο | Απαιτούμενος αριθμός κόμβων σε σχέση με το κόλουρο οκτάεδρο |
|--------------------------------------|-------------------|---|
| Κύβος | 0,36755 | 85,9% περισσότεροι |
| Εξαγωνικό Πρίσμα | 0,477 | 43,25% περισσότεροι |
| Ρομβικό Δωδεκάεδρο | 0,477 | 43,25% περισσότεροι |
| Κόλουρο Οκτάεδρο | 0,68329 | ίδιος |
| Πολύεδρα Weaire-Phelan ίδιας ακτίνας | 0,630169 | 8,43% περισσότεροι |

πιν. 1 Ογκομετρικό Ηλίκο διαφορετικών ειδών επικαλυπτικών πολυέδρων

Είναι πολύ ενδιαφέρον να δούμε τον τρόπο που σχετίζεται η λύση με τα δισδιάστατα δίκτυα. Το εξάγωνο αποτελεί τη βέλτιστη διαμέριση του επιπέδου. Ο λόγος της επιφάνειας του εξαγώνου προς την επιφάνεια του περιγεγραμμένου κύκλου είναι $3\sqrt{3}/2\pi = 0,82699$. Δεν είναι δύσκολο να δούμε γιατί το ηλίκο στον τρισδιάστατο χώρο είναι μικρότερο από αυτό του δισδιάστατου. Στο μονοδιάστατο επίπεδο πετυχαίνουμε ηλίκο ίσο με 1, χρησιμοποιώντας διαμέριση ευθείας γραμμής (που είναι και ο μοναδικός τρόπος διαμέρισης στην μία διάσταση). Παρατηρούμε ότι η απώλεια στην τιμή του ηλίκου παραμένει περίπου η

ίδια όσο ανεβαίνουμε στις διαστάσεις. Συγκεκριμένα, από τη μία διάσταση στις δύο έχουμε απώλεια $0,82699/1=82,699\%$. Από τις δύο διαστάσεις στις τρεις, αν θεωρήσουμε ότι το κόλουρο οκτάεδρο είναι το βέλτιστο πολύεδρο που διαμερίζει το χώρο, θα έχουμε απώλεια $0,68329/0,82699=82,623\%$.

4.3 Ενέργεια και Κάλυψη

Μπορεί το ογκομετρικό πηλίκο να μας δίνει ένα μέγεθος από το οποίο μπορούμε να υπολογίσουμε την πυκνότητα των κόμβων σε ένα δεδομένο τρισδιάστατο χώρο, όμως υπάρχει και το πρόβλημα της ενέργειας ενός αισθητήρα και κατά πόσο μπορούμε να έχουμε ελάχιστη κατανάλωση ενέργειας με τη μέγιστη κάλυψη. Αν θεωρήσουμε τον όγκο V ενός πολυέδρου ως μέτρο της εμβέλειας και την επιφάνεια S ως το μέτρο για την ενέργεια τότε βλέπουμε ότι το ισοπεριμετρικό πηλίκο αποτελεί ένα πολύ βολικό μέγεθος για την αποδοτικότητα ενός κόμβου.

Ορισμός: Δεδομένου ενός πολυέδρου επιφάνειας S και όγκου V , ορίζεται ως ισοπεριμετρικό πηλίκο το αδιάστατο μέγεθος:

$$36\pi \frac{V^2}{S^3}$$

Το ισοπεριμετρικό πηλίκο μιας σφαίρας είναι 1. Στη συνέχεια θα δούμε για κάθε σχήμα ξεχωριστά το ισοπεριμετρικό πηλίκο ώστε να δούμε ποιο είναι πιο αποδοτικό.

4.3.1 Κύβος

Η επιφάνεια του κύβου πλευράς a είναι ίση με $6a^2$ ενώ ο όγκος του θα είναι a^3 . Επομένως, το ισοπεριμετρικό πηλίκο θα είναι:

$$6\pi \frac{(a^3)^2}{(6a^2)^3} = \frac{\pi}{6} = 0,523599$$

4.3.2 Εξαγωνικό Πρίσμα

Στο εξαγωνικό πρίσμα πλευράς a και ύψους $a\sqrt{2}$ η συνολική επιφάνεια είναι όσο τα 2 εξάγωνα πλευράς a και 6 παραλληλόγραμμες πλευρές με ακμές a και $a\sqrt{2}$. Συνεπώς, το εμβαδόν του εξαγωνικού πρίσματος είναι $2\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 + 6a^2\sqrt{2}$. Ο όγκος του πρίσματος είναι $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^3\sqrt{2}$. Άρα το ισοπεριμετρικό πηλίκο θα είναι:

$$36\pi \frac{(\frac{3\sqrt{3}}{2}a^3\sqrt{2})^2}{(2\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 + 6a^2\sqrt{2})^3} = \frac{18\pi}{(2\sqrt{2} + \sqrt{3})^3} = 0,596199$$

4.3.3 Ρομβικό Δωδεκάεδρο

Η επιφάνεια του ρομβικού δωδεκάεδρου αποτελείται από 6 πυραμίδες πλευράς a . Η ενεργή επιφάνεια κάθε πυραμίδας (δηλαδή, χωρίς τη βάση) είναι $a^2\sqrt{2}$. Άρα, η συνολική επιφάνεια του δωδεκάεδρου είναι $6a^2\sqrt{2}$. Ο όγκος του είναι όσο ο όγκος 2 κύβων πλευράς a δηλαδή $2a^3$. Έτσι, το ισοπεριμετρικό πηλίκο ισούται με:

$$36\pi \frac{(2a^3)^2}{(6a^2\sqrt{2})^3} = \frac{\pi}{3\sqrt{2}} = 0,74048$$

4.3.4 Κόλουρο Οκτάεδρο

Η επιφάνεια του κόλουρου οκτάεδρου πλευράς a είναι $(6 + 12\sqrt{3})a^2$ ενώ ο όγκος είναι $8\sqrt{2}a^3$. Συνεπώς, το ισοπεριμετρικό πηλίκο θα έχει τιμή:

$$36\pi \frac{(8\sqrt{2}a^3)^2}{((6 + 12\sqrt{3})a^2)^3} = \frac{64\pi}{3(1 + 2\sqrt{3})^3} = 0,753367$$

4.3.5 Διαμέριση Weaire-Phelan

Για τη διαμέριση Weaire-Phelan θα θεωρήσουμε ότι ο όγκος των δύο ειδών πολυέδρων είναι ίσος και ως εμβαδόν επιφάνειας θα ορίσουμε το μέσο εμβαδόν της επιφάνειας των πολυέδρων. Όπως είδαμε παραπάνω το συγκεκριμένο σενάριο ισχύει όταν $a = \sqrt[3]{2}$. Οι Weaire και Phelan έδειξαν ότι το ισοπεριμετρικό πηλίκο με τους παραπάνω περιορισμούς είναι 0,765.

4.3.6 Σύγκριση των αποτελεσμάτων

Από τα παραπάνω αποτελέσματα συμπεραίνουμε ότι η πιο αποδοτική δομή είναι η Weaire-Phelan. Δεδομένου του όγκου κάλυψης (αισθητήρια εμβέλεια) βλέπουμε ότι ο κύβος φτάνει το $0,523599/0,765 = 68,44\%$ της αποδοτικότητας της δομής Weaire-Phelan. Αυτό σημαίνει ότι είναι 31,56% λιγότερο ενεργειακά αποδοτικός. Αντίστοιχα για το εξαγωνικό πρίσμα είναι $1-(0,596199/0,765)=22,07\%$, για το ρομβικό δωδεκάεδρο $1-(0,74048/0,765)=3,21\%$ και για το κόλουρο οκτάεδρο $1-(0,753367/0,765)=1,52\%$.

Οι απώλειες στην αποδοτικότητα του ρομβικού δωδεκάεδρου και του κόλουρου οκτάεδρου μπορεί να φαίνονται μικρές, άλλα δεδομένου ότι η ενέργεια των αισθητήρων είναι ένα μέγεθος μικρής κλίμακας, καταλαβαίνουμε ότι στην πραγματικότητα οι διαφορές αυτές είναι μεγάλες. Στον παρακάτω πίνακα συνοψίζουμε τα παραπάνω αποτελέσματα:

| Πολύεδρο | Ισοπεριμετρικό Πηλίκιο (Ενεργειακή Αποδοτικότητα) | Απώλεια Αποδοτικότητας σε σχέση με τη καλύτερη λύση |
|--------------------------------------|--|--|
| Κύβος | 0,523599 | 31,56% |
| Εξαγωνικό Πρίσμα | 0,596199 | 22,07% |
| Ρομβικό Δωδεκάεδρο | 0,74048 | 3,21% |
| Κόλουρο Οκτάεδρο | 0,753367 | 1,52% |
| Πολύεδρα Weaire-Phelan ίδιας ακτίνας | 0,765 | - |

πιν. 2 Ενεργειακή αποδοτικότητα διαφόρων ειδών πολυέδρων

4.3.7 Σχέση Εμβέλειας Εκπομπής και Αισθητήριας Εμβέλειας

Η απαιτούμενη ελάχιστη εμβέλεια εκπομπής μεταξύ γειτονικών κόμβων εξαρτάται από την επιλογή του πολύεδρου. Στο χώρο, εμβέλεια εκπομπής είναι η απόσταση μεταξύ δύο γειτονικών κόμβων. Συνεπώς, αν έχουμε επιλέξει τον κύβο πλευράς a , η απόσταση μεταξύ δύο γειτονικών κόμβων είναι a . Δεδομένου ότι η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου είναι $R = a\sqrt{3}/2$, η απόσταση θα είναι $a = 2\sqrt{3}R/3 = 1,1547R$. Για το εξαγωνικό πρίσμα η εμβέλεια εκπομπής πρέπει να είναι τουλάχιστον $\sqrt{2}R = 1,4142R$ για τους γειτονικούς κόμβους που βρίσκονται στο επίπεδο x, y και τουλάχιστον $2\sqrt{3}R/3 = 1,1547R$ ώστε να επιτυγχάνεται η επικοινωνία με τους γειτονικούς κόμβους στο επίπεδο z . Στο ρομβικό δωδεκάεδρο η ελάχιστη εμβέλεια εκπομπής που χρειάζεται είναι $\sqrt{2}R = 1,4142R$ για κάθε γείτονα στο χώρο. Στο κόλουρο οκτάεδρο η εμβέλεια εκπομπής θα είναι τουλάχιστον $4\sqrt{5}R/5 = 1,7889R$ με τους γείτονες στους άξονες x, y και τουλάχιστον $2\sqrt{15}R/5 = 1,5492$ στον άξονα z . Για τη δομή Weaire-Phelan κάναμε όλους τους υπολογισμούς θεωρώντας ότι η απόσταση μεταξύ δύο γειτονικών δεκατετράεδρων που μοιράζονται τις εξάγωνες πλευρές

είναι ίση με 2. Άρα, αν θεωρήσουμε ότι αυτή η απόσταση των γειτόνων είναι TR , τότε το $TR/2$ είναι ο παράγοντας με τον οποίο πολλαπλασιάζουμε τις συντεταγμένες (βλέπε 4.2.5) για να τοποθετήσουμε τους κόμβους πιο κοντά ή πιο μακριά μεταξύ τους. Επιπρόσθετα θα θεωρήσουμε ότι $\alpha=5/4$ καθώς για αυτές τις τιμές είναι ίσες οι μέγιστες ακτίνες των σχημάτων. Λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση του δωδεκάεδρου που μας δίνει τη μέγιστη ακτίνα έχουμε ότι $R = TR/2\sqrt{5/2} \Rightarrow TR = 2\sqrt{10}/5R = 1,2649R$. Αυτή είναι και η εμβέλεια για κόμβους που είναι γείτονες με την εξαγωνική πλευρά του δεκατετράεδρου. Για τα γειτονικά δεκατετράεδρα που είναι γειτονικά μέσω των πεντάγωνων πλευρών του δεκατετράεδρου η εμβέλεια θα είναι $1,5492R$. Τέλος, για τα γειτονικά δεκατετράεδρα – δωδεκάεδρα η εμβέλεια θα είναι $1,118R$. Άρα, βλέπουμε ότι στον τομέα της επικοινωνίας μεταξύ των κόμβων κερδίζει ο κύβος καθώς η εμβέλεια εκπομπής είναι πολύ κοντά στην αισθητήρια εμβέλεια. Παράλληλα, παρατηρούμε ότι και σε αυτόν τον τομέα τα πολύεδρα Weaire-Phelan παρουσιάζουν ενεργειακά καλύτερη απόδοση από το κόλουρο οκτάεδρο. Στον παρακάτω πίνακα συνοψίζουμε τα αποτελέσματα:

| Πολύεδρο | Ελάχιστη Εμβέλεια Εκπομπής | | | Max-Min Εμβέλειας Εκπομπής |
|--------------------------------------|----------------------------|---------|---------|----------------------------|
| | x | y | z | |
| Κύβος | 1,1547R | 1,1547R | 1,1547R | 1,1547R |
| Εξαγωνικό Πρίσμα | 1,4142R | 1,4142R | 1,1547R | 1,4142R |
| Ρομβικό Δωδεκάεδρο | 1,4142R | 1,4142R | 1,4142R | 1,4142R |
| Κόλουρο Οκτάεδρο | 1,7889R | 1,4142R | 1,5492R | 1,7889R |
| Πολύεδρα Weaire-Phelan ίδιας ακτίνας | 1,2649R | 1,5492R | 1,118R | 1,5492R |

πιν. 3 Εμβέλεια Εκπομπής για διαφόρων ειδών πολύεδρα

5 Εφαρμογή σε πραγματικά Δίκτυα

Τα παραπάνω συμπεράσματα είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθούν σε σταθερά αλλά και σε κινητά δίκτυα αισθητήρων. Εάν οι κόμβοι είναι σταθεροί, τότε η λύση που πρέπει να χρησιμοποιηθεί είναι η βέλτιστη αρχική τοποθέτηση των αισθητήρων. Εάν οι κόμβοι είναι κινητοί, τότε οι κόμβοι πρέπει να υπολογίζουν δυναμικά τις τοποθεσίες τους ώστε να μετακινούνται σε κατάλληλες θέσεις για να πετυχαίνουν τους στόχους που αναλύσαμε.

Μια κατανεμημένη εκδοχή των στρατηγικών τοποθέτησης μπορεί να έχει ως εξής. Πρώτον, οι κόμβοι διαλέγουν έναν «αρχηγό» βάση οποιουδήποτε αλγορίθμου εκλογής αρχηγού. Κατόπιν η δομή μπορεί να μεγαλώσει δεδομένης της τοποθεσίας του αρχηγού. Η τοποθέτηση των κόμβων θα είναι όπως αυτή ενός πλέγματος. Αυτή η προσέγγιση δουλεύει καλύτερα αν οι κόμβοι γνωρίζουν ακριβώς τη θέση τους στο χώρο, χρησιμοποιώντας π.χ. ένα σύστημα μορφής GPS. Παρόλα αυτά θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ο τοπικός υπολογισμός της απόστασης με άλλους γειτονικούς κόμβους, εάν οι κόμβοι μπορούν να φτάσουν σε μια κοινή «συμφωνία» στο πλαίσιο αναφοράς (άξονες x,y,z). Για δίκτυα που βρίσκονται στον ωκεανό ή την ατμόσφαιρα ένα καλό πλαίσιο αναφοράς μπορεί να έχει ως εξής: το επίπεδο xy είναι παράλληλο με την επιφάνεια της γης και ο άξονας z είναι παράλληλος με τον άξονα που περνάει από τους δυο μαγνητικούς πόλους της γης, με θετική κατεύθυνση από το νότιο προς το βόρειο πόλο. Έτσι, οι κόμβοι μπορούν να προσανατολίζονται βασιζόμενοι στο μαγνητικό πεδίο της γης, χρησιμοποιώντας εξοπλισμό που προσφέρει λειτουργία ανάλογη μιας πυξίδας.

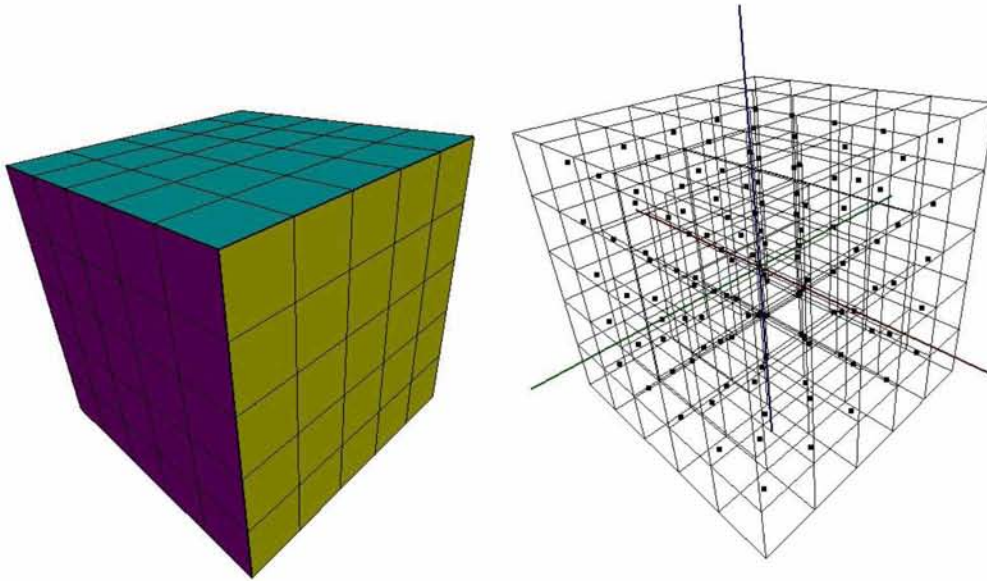
Στην περίπτωση που ένας κόμβος αποτύχει να μετακινηθεί, οι άλλοι κόμβοι πρέπει να προσαρμόσουν την τοποθεσία τους ή και την εμβέλεια τους (δομή Weaire-Phelan) για να καλύψουν το κενό που δημιουργείται από την βλάβη του κόμβου. Εντούτοις στην περίπτωση παρακολούθησης του τρισδιάστατου χώρου από πολύ φθηνούς αισθητήρες που δεν μπορούν να τροποποιήσουν την τοποθεσία τους ή δεν ξέρουν ακριβώς τη θέση τους, πολλοί κόμβοι μπορούν να διανεμηθούν τυχαία στο χώρο. Εάν το δίκτυο κατασκευάζεται στο διάστημα, δεν θα υπάρχουν βαρυτικές δυνάμεις και οι κόμβοι θα μένουν στην αρχική τους θέση χωρίς να απαιτείται μεγάλη μετακίνησή τους. Στον ωκεανό οι κόμβοι μπορούν να τοποθετηθούν σε διαφορετικά βάθη όντας δεμένοι στο βυθό της θάλασσας και χρησιμοποιώντας την άνωση για να φτάσουν στο απαιτούμενο βάθος. Σε ένα τέτοιο δίκτυο η ενέργεια είναι σημαντικός παράγοντας και η επιλογή ενός υποσυνόλου κόμβων που θα παραμένει ενεργό ενώ θα

διατηρείται η αισθητήρια εμβέλεια και η επικοινωνία μεταξύ τους, είναι ένα σημαντικό πρόβλημα.

6 Προσομοίωση

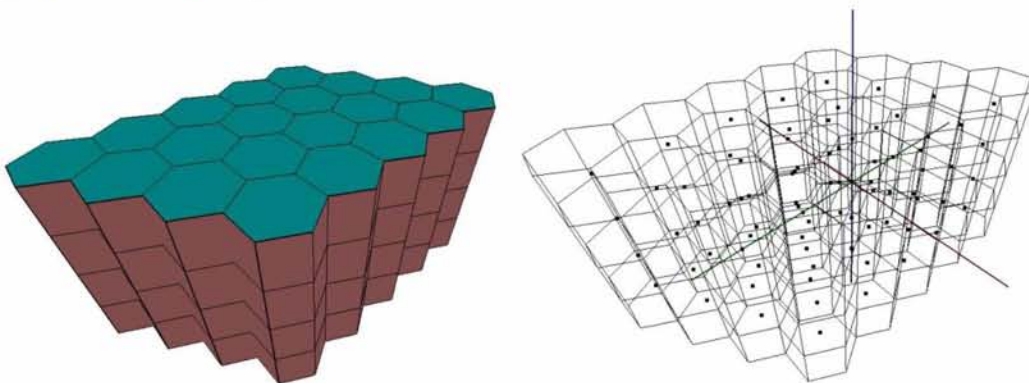
Η προσομοίωση έγινε με πρόγραμμα γραμμένο σε γλώσσα προγραμματισμού C και χρησιμοποιώντας τις βιβλιοθήκες της OpenGL από το API του GLUT. Παρακάτω παρουσιάζουμε μερικές διατάξεις αισθητήρων στο χώρο. Στις απεικονίσεις ως πλέγμα φαίνονται και τα κέντρα των πολυέδρων (κόμβοι).

6.1 Κύβος



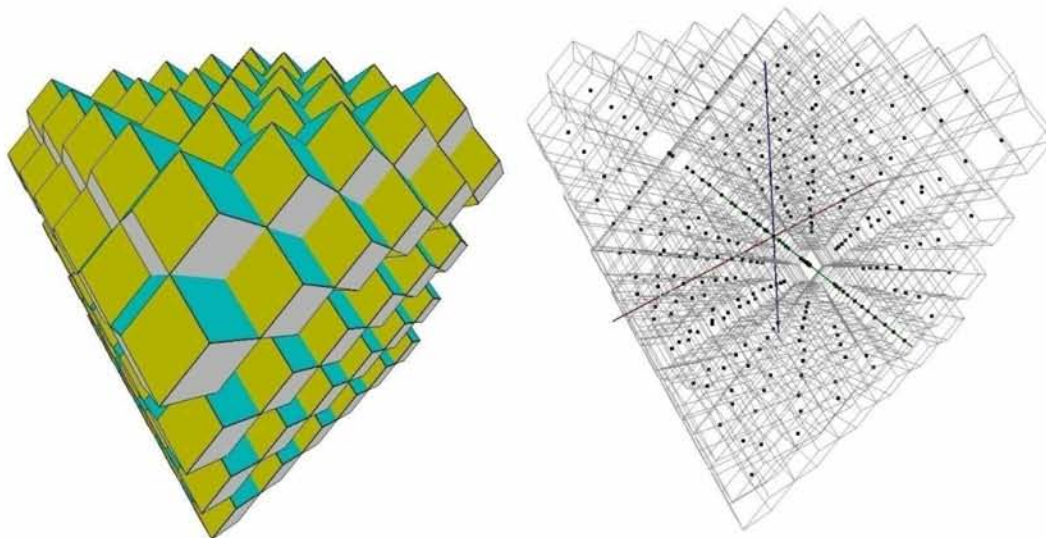
εικ. 12 Διάταξη Κύβων στο χώρο σε στερεό και πλέγμα

6.2 Εξαγωνικό Πρίσμα



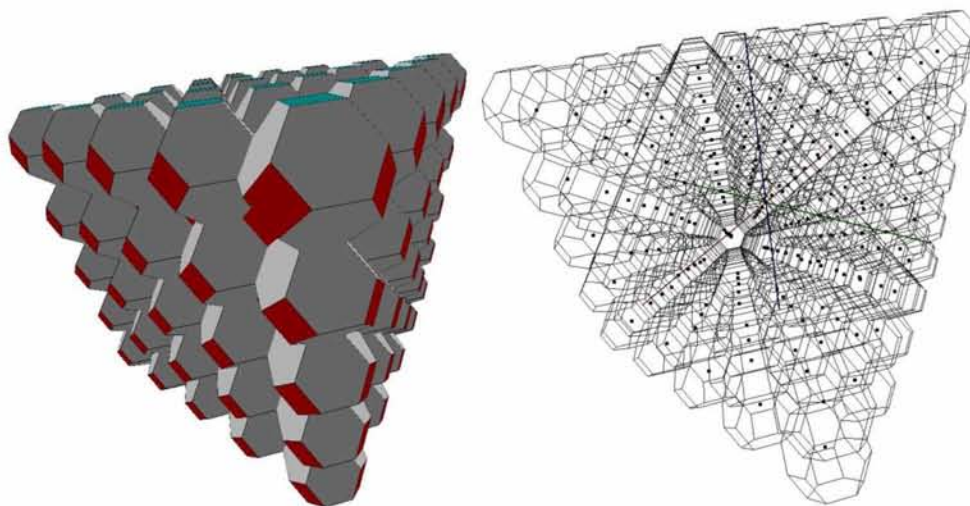
εικ. 13 Διάταξη Εξαγωνικών Πρισμάτων στο χώρο σε στερεό και πλέγμα

6.3 Ρομβικό Δωδεκάεδρο



εικ. 14 Διάταξη Ρομβικών Δωδεκάεδρων στο χώρο σε στερεό και πλέγμα

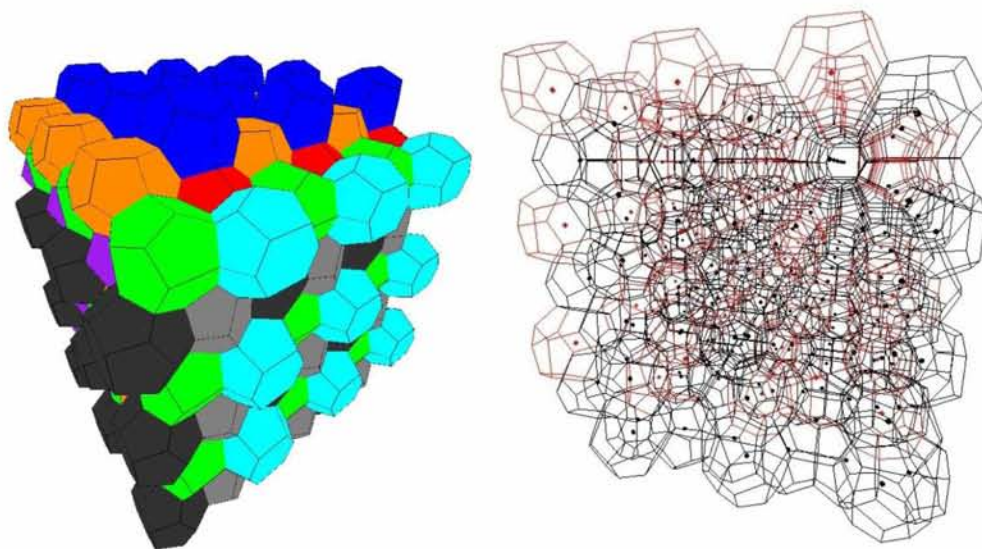
6.4 Κόλουρο Οκτάεδρο



εικ. 15 Διάταξη Κόλουρων Οκτάεδρων στο χώρο σε στερεό και πλέγμα

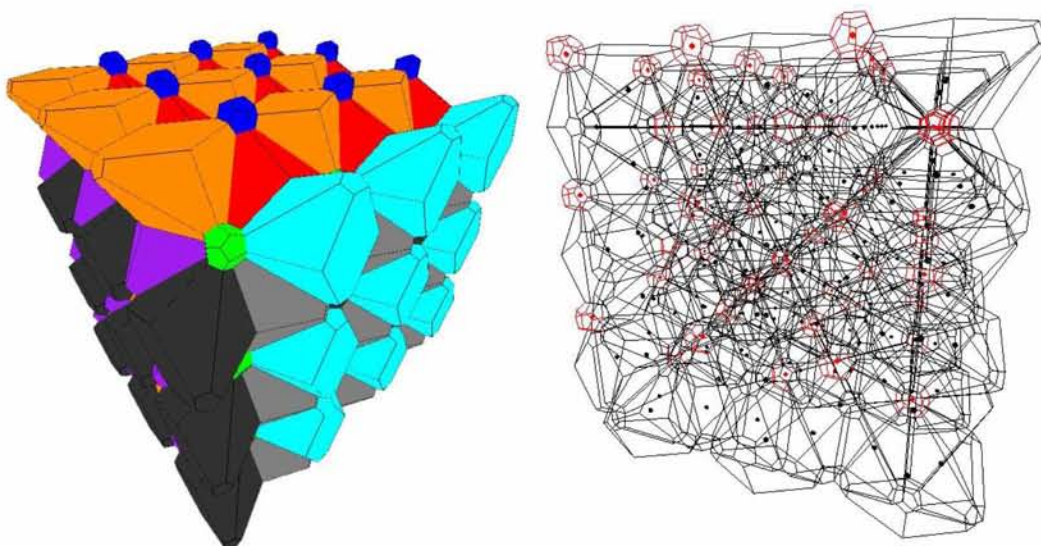
6.5 Διαμέριση Weaire-Phelan

6.5.1 Διαμέριση Voronoï ($\alpha=5/4$)



εικ. 16 Διάταξη Αφρού Weaire-Phelan στο χώρο σε στερεό και πλέγμα

6.5.2 Μικρή τιμή α



εικ. 17 Διάταξη Αφρού Weaire-Phelan στο χώρο σε στερεό και πλέγμα

7 Επίλογος

Στην εργασία διερευνήσαμε θέματα κάλυψης και συνδεσιμότητας τρισδιάστατων δικτύων αισθητήρων, όπου οι κόμβοι τοποθετούνται στο χώρο σε αντίθεση με τις παρούσες πρακτικές που υποθέτουν ότι οι κόμβοι τοποθετούνται στο δισδιάστατο επίπεδο. Η μετάβαση από τις δύο στις τρεις διαστάσεις δεν είναι πάντα εύκολη, από τη στιγμή που πολλά προβλήματα των τριών διαστάσεων είναι πολύ πιο δύσκολο να επιλυθούν από τα αντίστοιχα προβλήματα των δύο διαστάσεων. Πολλά από αυτά τα προβλήματα αποτελούν σημαντικές ερευνητικές προκλήσεις που παραμένουν άλυτες ακόμα και για αιώνες. Σε δισδιάστατα κυψελωτά δίκτυα, η εξαγωνική διαμέριση χρησιμοποιείται για την τοποθέτηση σταθμών βάσης, ώστε να μεγιστοποιείται η κάλυψη με σταθερό αριθμό κόμβων σταθερής εμβέλειας. Η λύση παρόμοιων προβλημάτων στον τρισδιάστατο χώρο παραμένει η ίδια όταν αναφερόμαστε σε κυψελωτά δίκτυα με εμβέλεια χιλιομέτρων. Αντίθετα, το πρόβλημα είναι σημαντικό όταν αφορά σε κόμβους περιορισμένης αισθητήριας εμβέλειας και ζητάμε την κάλυψη ενός πολύ μεγάλου τρισδιάστατου χώρου.

Δείξαμε ότι για την βέλτιστη κάλυψη ενός τρισδιάστατου χώρου, το κόλουρο οκτάεδρο και η δομή Weaire-Phelan είναι οι πλέον κατάλληλες λύσεις. Χρησιμοποιώντας το *ογκομετρικό πηλίκο*, δείξαμε ότι η διαμέριση του χώρου σε κόλουρα οκτάεδρα μας δίνει καλύτερη αναλογία θεωρητικής–πρακτικής κάλυψης σε σχέση με όλες τις άλλες δομές που δοκιμάστηκαν. Ο αριθμός των κόμβων που χρειάζονται για την κάλυψη ενός τρισδιάστατου χώρου εξαρτάται από τη διαμέριση Voronoi του χώρου από αυτούς τους κόμβους. Οπότε, εάν τα επικαλυπτικά πολύεδρα που δημιουργούνται έχουν μεγαλύτερο ογκομετρικό πηλίκο, τότε χρειάζεται μικρότερος αριθμός κόμβων. Στην περίπτωση του κόλουρου οκτάεδρου το ογκομετρικό πηλίκο είναι 0,68329 μεγαλύτερο από όλα τα άλλα πολύεδρα. Το μέσο ογκομετρικό πηλίκο της δομής Weaire-Phelan δείξαμε ότι είναι 0,630169. Άρα χρειάζονται 8,43% περισσότεροι κόμβοι, που είναι μικρό ποσοστό σε σχέση με τις άλλες δομές.

Στον τομέα της ενέργειας χρησιμοποιήσαμε το *ισοπεριμετρικό πηλίκο* που μας δίνει την αποδοτικότητα ενός κόμβου ως σχέση της επιφάνειας επικάλυψης με την αισθητήρια εμβέλεια. Αποδείξαμε ότι η δομή Weaire-Phelan παρουσίασε μεγαλύτερη αποδοτικότητα 0,765. Δεύτερη σε αποδοτικότητα δομή ήταν το κόλουρο οκτάεδρο με πηλίκο 0,753367. Η απώλεια αποδοτικότητας σε σχέση με τη δομή Weaire-Phelan είναι 1,52%, αρκετά σημαντικό ποσοστό δεδομένου ότι οι ενέργειες που καταναλώνουν οι αισθητήρες είναι πολύ μικρές.

Υπολογίσαμε επίσης τη σχέση εμβέλειας επικοινωνίας και κάλυψης για κάθε πολύεδρο. Στον τομέα αυτό η ενέργεια επικοινωνίας (απόσταση μεταξύ δύο γειτονικών κόμβων) σε σχέση με την αισθητήρια εμβέλεια (ακτίνα περιγεγραμμένης σφαίρας πολυέδρου) είναι μικρότερη για τον κύβο με λόγο 1,1547. Από τις δύο χωρικά βέλτιστες δομές (κόλouro οκτάεδρο – πολυέδρα Weaire-Phelan) καλύτερη απόδοση έχει η δομή Weaire-Phelan με λόγο 1,5492 ενώ το κόλouro οκτάεδρο έχει λόγο 1,7889, που είναι και ο μεγαλύτερος λόγος από όλα τα πολυέδρα που μελετήσαμε.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι οι καλύτερες δομές που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε είναι το κόλouro οκτάεδρο και ο αφρός Weaire-Phelan. Το εκάστοτε κόστος αποτελεί τον καθοριστικό παράγοντα για την βέλτιστη δομή. Αν θεωρήσουμε ως κόστος τον αριθμό των κόμβων, σίγουρα το κόλouro οκτάεδρο είναι πιο αποδοτικό πετυχαίνοντας κάλυψη με μικρότερο αριθμό κόμβων. Αν από την άλλη πλευρά, το κόστος αφορά στην κατανάλωση ενέργειας, η δομή Weaire-Phelan προσφέρει καλύτερη απόδοση ενέργειας. Εν κατακλείδι πρέπει να αναφέρουμε ότι ένα επιπρόσθετο πλεονέκτημα της δομής Weaire-Phelan είναι η παραμετροποίησή της, που μπορεί να βοηθήσει σε προβλήματα δυναμικής κάλυψης του χώρου λόγω βλάβης αισθητήρων ή ανομοιογένειας στο χώρο κάλυψης.

8 Βιβλιογραφία

1. *Coverage and Connectivity in Three-Dimensional Networks*. **S. M. Nazrul Alam, Zygmunt J. Haas**. 2006.
2. *A counter-example to Kelvin's conjecture on minimal surfaces*. **D. Weaire, R. Phelan**. 1994.
3. *Packing, tiling, and covering with tetrahedra*. **Torquato, J. H. Conway. S.** 2006.
4. *On Quantization with the Weaire-Phelan Partition*. **Navin Kashyap, David L. Neuhoﬀ**. 2001.
5. *Tiling space and slabs with acute tetrahedra*. **D. Eppstein, John M. Sullivan, Alper Ungor**. 2003.
6. *Comparing the Weaire-Phelan Equal-Volume Foam to Kelvin's Foam*. **Rob Kusner, John M. Sullivan**. 1996.

